Vektorgeometrie ganz einfach

Teil 7 Abstände

Berechnung von Abständen
zu einer Geraden

Ein für Lehrer interessanter Text!

Datei Nr. 64111

Stand 3. April 2026

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK
UND STUDIUM

https://mathe-cd.de

Vorwort:

In diesem Text geht es um Abstände von einer Geraden,
also Punkt – Gerade sowie Gerade- Gerade.

Die Aufgabe, einen Abstand einer Ebene zu einer parallelen Geraden wird in den Texten 64005 und 64006 gelöst. Dort findet man alle Abstandsberechnungen zu einer Ebene, also alles, was mit der Hesseschen Normalform berechnet werden kann.

Inhalt:

1 Abstand eines Punktes von einer Geraden.

Hier zeige ich vier ganz verschiedene Methoden.

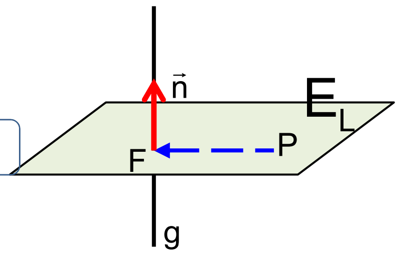
Die erste besteht darin, dass man durch P eine **Lotebene** senkrecht zu g legt. Der Schnittpunkt mit g ist der Lotfußpunkt. Damit kann man den gesuchten Abstand berechnen.

Die zweite Methode verwendet statt des Lotfußpunkts zunächst einen beliebigen Punkt der Geraden. Dann erzwingt man zwischen Gerade und Lot den rechten Winkel mit einem Skalarprodukt und findet so den eigentliche Lotfußpunkt.

Die dritte Methode berechnet den Inhalt eines Parallelogramms auf zwei Arten, einmal mkit dem Kreuzprodukt und einmal mit dem gesuchten Abstand.

Die dritte Methode verwendet die wenig bekannte Methode des **zweifachen Kreuzproduktes**.

1.1 Abstandsberechnung mittels Lotebene



Fälle das Lot von P auf g (im Raum) und berechne dann den Abstand.

Beispiel Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,5\,|\,2)$.

WISSEN: Man verwendet den Richtungsvektor der Geraden als Normalenvektor für die **Lotebene**. Das Absolutglied der Ebenengleichung erhält man durch Einsetzen eines Punktes der Ebene.

Lösung: Der Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ wird Normalenvektor von E_L: $-2x + y + 3z = k$

Die Lotebene soll durch $P(3\,|\,5\,|\,2)$ gehen: $k = -2\cdot\boxed{3} + \boxed{5} + 3\cdot\boxed{2} = -6 + 5 + 6 = 5$

Lotebene: E_L: $\mathbf{-2x + y + 3z = 5}$

Schnitt von g mit der Lotebene durch Einsetzen: $-2\cdot\boxed{1-2r} + \boxed{3+r} + 3\cdot\boxed{-1+3r} = 5$

$-2 + 4r + 3 + r - 3 + 9r = 5$

$14r - 2 = 5 \;\Leftrightarrow\; 14r = 7 \;\Leftrightarrow\; \mathbf{r = \tfrac{1}{2}}$

Lotfußpunkt von P auf g: $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \boxed{\tfrac{1}{2}}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix}$, $F(0\,|\,3{,}5\,|\,0{,}5)$ oder $F\left(0\,|\,\tfrac{7}{2}\,|\,\tfrac{1}{2}\right)$

Abstandsvektor: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Abstandsberechnung; $d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9 + \tfrac{9}{4} + \tfrac{9}{4}} = \sqrt{\tfrac{54}{4}} = \tfrac{1}{2}\cdot\sqrt{9\cdot 6} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$

Oder günstiger so: $d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \tfrac{3}{2}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \tfrac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \tfrac{3}{2}\sqrt{6}$

1.2 Berechnung des Lotfußpunktes mit der operativen Methode

Beispiel Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(3|5|2)$.

Fälle das Lot von P auf g (im Raum) mit der operativen Methode

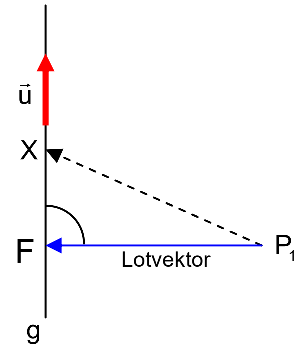
Lösung

Der zunächst noch unbekannte Punkt X soll zum Lotfußpunkt F werden. Man entnimmt seine Koordinaten der Geradengleichung mit unbekanntem r:

$$X(1-2r\,|\,3+r\,|\,-1+3r)$$

Damit X zum Lotfußpunkt F wird muss gelten

$\overrightarrow{PX} \perp \vec{u}$, d. h. **Bedingung ist**: $\boxed{\overrightarrow{P_1X} \cdot \vec{u} = 0}$



Dieses Nullprodukt erzeugt den rechten Winkel bei F.

$\overrightarrow{PX} = \begin{pmatrix} 1-2r \\ 3+r \\ -1+3r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2r \\ -2+r \\ -3+3r \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} -2-2r \\ -2+r \\ -3+3r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$

$$-2\cdot(-2-2r) + (-2+r) + 3\cdot(-3+3r) = 0$$

$$4 + 4r - 2 + r - 9 + 9r = 0$$

$$14r - 7 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad r = \tfrac{1}{2}$$

Mit diesem r-Wert wird X zum gesuchten

Lotfußpunkt: $F\left(1-2\cdot\tfrac{1}{2}\,|\,3+\tfrac{1}{2}\,|\,-1+3\cdot\tfrac{1}{2}\right) = (0\,|\,3,5\,|\,0,5)$

Der gesuchte Abstand ist der Betrag des Vektors $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} -2-2\cdot\frac{1}{2} \\ -2+\frac{1}{2} \\ -3+3\cdot\frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$

Abstandsberechnung; $d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} -3 \\ -\frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix}\right| = \sqrt{9+\frac{9}{4}+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{9\cdot 6} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

Oder günstiger so: $d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \frac{3}{2}\left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}\right| = \frac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$

HINWEISE:

Die beiden Methoden in unterscheiden sich nur in der Berechnung des Lotfußpunkts.

Die abschließende Abstandsberechnung ist identisch, nämlich die Berechnung der Betrags von $\overrightarrow{PF}$.

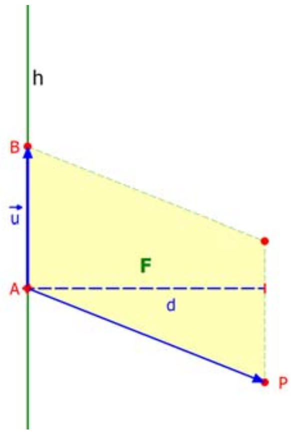
1.3 Berechnung mit dem Kreuzprodukt (Vektorprodukt)

Gegeben ist die Gerade h und der Punkt P.
Gesucht ist der Abstand d des Punktes P von h.

Methode:

A sei ein Punkt von h.
F sei der Flächeninhalt des Parallelogramms, das von den Vektoren $\vec{u}$ und $\overrightarrow{AP}$ aufgespannt wird.
Den Flächeninhalt des Parallelogramms kann man mit dem Vektorprodukt $\vec{u} \times \overrightarrow{AP}$ berechnen, aber auch mit der Formel $|\vec{u}| \cdot d$.

Daraus folgt: $F = |\vec{u}| \cdot d = \left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right| \Rightarrow \boxed{d = \dfrac{\left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right|}{|\vec{u}|}}$



Zahlenbeispiel:

Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,5\,|\,2)$.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u} \times \overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-6 \\ 6+6 \\ -4-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 12 \\ -6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Verdopplungsschema:

$$\begin{array}{cc} \cancel{-2} & \cancel{2} \\ 1 & 2 \\ 3 & 3 \\ -2 & 2 \\ 1 & 2 \\ \cancel{3} & \cancel{3} \end{array}$$

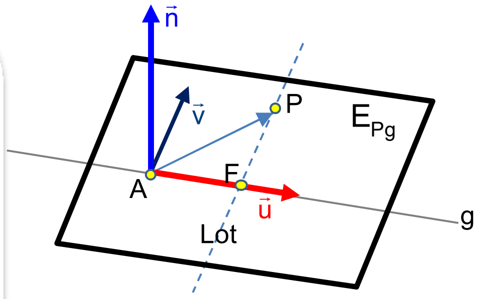
$$d = \frac{3 \cdot \sqrt{1+16+4}}{\sqrt{4+1+9}} = \frac{3\sqrt{21}}{\sqrt{14}} = \frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$$

1.4 Berechnung der Lotgeraden mit dem doppelten Kreuzprodukt.

Das Problem liegt darin, dass man nicht ohne weiteres das Lot auf eine Gerade fällen kann.

Die hier gezeigte Methode beruht darauf, dass man mit dem Kreuzprodukt $\overrightarrow{AP} \times \vec{u}$ zuerst einen Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E_{Pg} berechnet, in der P und g liegen.

(A sei der Aufpunkt der Geraden g, $\vec{u}$ ihr Richtungsvektor.)
Dann erhält man mit $\vec{v} := \vec{n} \times \vec{u}$ einen Vektor, der als Richtungsvektor des Lotes von P auf g verwendbar ist.



Dies wird im Text 64150 (Lot auf eine Gerade) ausführlich gezeigt.

Beispiel

Gegeben g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$ und $P(3|5|2)$. Fälle das Lot von P auf g.

Lösung: $\vec{n} = \overrightarrow{AP} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-3 \\ -6-6 \\ 2+4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{cc} \cancel{2} & \cancel{-2} \\ 2 & 1 \\ 3 & 3 \\ 2 & -2 \\ 2 & 1 \\ \cancel{3} & \cancel{3} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{-2} \\ -12 & 1 \\ 6 & 3 \\ 3 & -2 \\ -12 & 1 \\ \cancel{6} & \cancel{3} \end{array}$$

$$\vec{v} = \vec{n} \times \vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -12 \\ 6 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36-6 \\ -12-9 \\ 3-24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -42 \\ -21 \\ -21 \end{pmatrix} = -21 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Dies ist ein Richtungsvektor der Lotgeraden, die damit diese Gleichung hat:

$$L: \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Man schneidet nun L mit g und berechnet den gesuchten Lotfußpunkt F auf g:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}}_{g} = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{L} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} -2r - 2t = 2 \\ r - t = 2 \\ 3r - t = 3 \end{array} \right\} \begin{array}{c} (1) \\ (2) \\ (3) \end{array}$$

Berechnung von r und t aus (2) und (3) durch:

(3) – (2): $2r = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{2}$

r in (2): $\frac{1}{2} - t = 2 \Rightarrow t = -\frac{3}{2}$

Probe in (1): $\text{L.S.} = -2 \cdot \frac{1}{2} - 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -1 + 3 = 2 = \text{R.S.}$

Da die Probe stimmt, schneiden sich L und g wirklich.
Das ist auf Grund des Ansatzes ohnehin klar. Man kann sich also die Probe sparen und nur r berechnen. Damit folgt:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \Rightarrow F(0 | 3{,}5 | 0{,}5)$$

Es folgt wie in Beispiel 1 und 2: $\boxed{d(P,g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \frac{3}{2} \left| \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right| = \frac{3}{2}\sqrt{4+1+1} = \frac{3}{2}\sqrt{6}}$

1.5 Abstand Punkt – Gerade als Extremwertaufgabe

Beispiel Gegeben g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $P(3\,|\,5\,|\,2)$.

Es sei B ein beliebiger Punkt von g: $B(1-2r\,|\,3+r\,|\,-1+3r)$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{BP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1-2r \\ 3+r \\ -1+3r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2r \\ 2-r \\ 3-3r \end{pmatrix}$

Der Vektor $\overrightarrow{BP}$ wird orthogonal zu g, wenn der Betrag von $\overrightarrow{BP}$ minimal ist.

$$\left|\overrightarrow{BP}\right| = \sqrt{(2+2r)^2 + (2-r)^2 + (3-3r)^2}$$

Dieser Wert wird minimal, wenn sein Quadrat minimal ist.

Daher definiere ich die **Quadratfunktion**: $q(r) = (2+2r)^2 + (2-r)^2 + (3-3r)^2$.

Ableitungen der Quadratfunktion mit der Kettenregel:

$$q'(r) = 2(2+2r)\cdot 2 + 2\cdot(2-r)\cdot(-1) + 2\cdot(3-3r)\cdot(-3)$$

$$q'(r) = 4(2+2r) - 2\cdot(2-r) - 6\cdot(3-3r)$$

$$q'(r) = 8r + 2r + 18r + 8 - 4 - 18$$

$$q'(r) = 28r - 14$$

Notwendige Bedingung für Extremwert: $q'(r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 28r = 14 \quad \Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{2}$

Hinreichende Bedingung: $q''\left(\frac{1}{2}\right) = 28 > 0 \quad \Rightarrow$ Minimum

Minimaler Quadratwert: $q\left(\frac{1}{2}\right) = (2+1)^2 + \left(2-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(3-\frac{3}{2}\right)^2 = 9 + \frac{9}{4} + \frac{9}{4} = \frac{27}{2}$

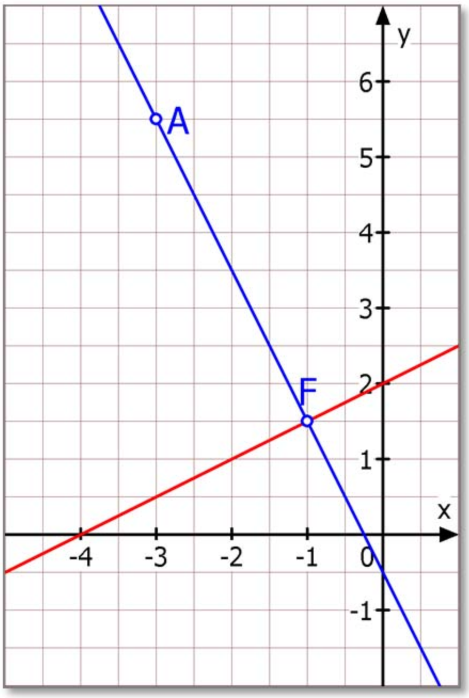
Kürzester Abstand: $d_{min} = \sqrt{q\left(\frac{1}{2}\right)} = \sqrt{\frac{27}{2}} = \sqrt{\frac{27}{2}\cdot\frac{2}{2}} = \sqrt{\frac{54}{4}} = \sqrt{\frac{9}{4}\cdot 6} = \frac{3}{2}\sqrt{6}$.

Zugehöriger Punkt B auf g: $\vec{b}_{min} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3{,}5 \\ 0{,}5 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B_{min}(0\,|\,3{,}5\,|\,0{,}5)$

1.6 Abstandsberechnung Punkt – Gerade in der x-y-Koordinatenebene

Beispiel Gegeben ist die Gerade g: $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Berechne den Abstand des Punktes $A(-3\,|\,5{,}5)$ von g.



1. Lösung: Mit der Lotgeraden, nicht-vektoriell

Lotgerade von A auf g: $m_g = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad m_L = -\frac{1}{m_g} = -2$

Punkt-Steigungsform: $y - y_A = m_L \cdot (x - x_A)$

$y - 5{,}5 = -2 \cdot (x + 3)$

$y = -2x - 6 + 5{,}5$

Ergebnis: L: $y = -2x - 0{,}5$

Schnitt von g und L: $\frac{1}{2}x + 2 = -2x - \frac{1}{2} \quad | \cdot 2$

$x + 4 = -4x - 1$

$5x = -5 \quad \Leftrightarrow \quad x_F = -1$

in L: $y_F = -2 \cdot (-1) - 0{,}5 = 2 - 0{,}5 = 1{,}5$

Lotfußpunkt: $F(-1\,|\,1{,}5)$

Der gesuchte Abstand ist die Länge der Strecke AF:

$$\overline{AF} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \sqrt{(-1+3)^2 + (1{,}5 - 5{,}5)^2} = \sqrt{2^2 + (-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = 2\sqrt{5}$$

2. Lösung: mit der HNF von g (Zweidimensional gibt es zu einer Geraden eine HNF!)

Da im zweidimensionalen Fall eine Gerade auch eine lineare Gleichung hat (vergleichbar der einer Ebene im Raum), kann man ihr auch eine HNF zuordnen:

g: $y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 2y = x + 4 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{-x + 2y - 4 = 0}$

Normalenvektor: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ mit: $|\vec{n}| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

HNF von g: $\boxed{\frac{-x + 2y - 4}{\sqrt{5}} = 0}$

Abstandsberechnung: $A(-3\,|\,5{,}5)$ von g:

$$d(A,g) = \frac{-\boxed{-3} + 2 \cdot \boxed{5{,}5} - 4}{\sqrt{5}} = \frac{3 + 11 - 4}{\sqrt{5}} = \frac{10}{\sqrt{5}} = \frac{10 \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}} = \frac{10\sqrt{5}}{5} = 2\sqrt{5}$$

Trainingsaufgaben

1 Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P(1|1|2)$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(5|3|4)$

c) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $P(2|-4|-2)$

d) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ $P(5|-3|0)$

e) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $P(5|2|2)$

f) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $P(4|5|3)$

Ergebnisse:

a) $d = 4{,}5$ Ich zeige eine Lösung mit der Lotebene auf Seite 18.

b) $d = 6\sqrt{3}$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 18.

c) $d = \sqrt{30}$ Ich zeige eine Lösung mit der Lotebene auf Seite 19.

d) $d = \sqrt{50}$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 19.

e) $d = \sqrt{2}$ Ich zeige eine Lösung mit der Lotebene auf Seite 20.

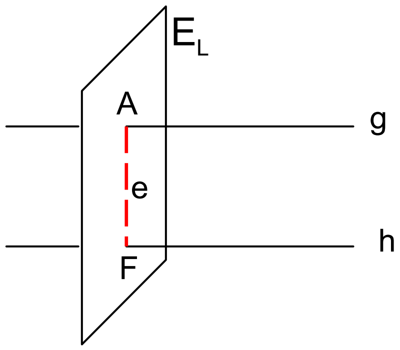
f) $d = \sqrt{109}$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 20.
und eine Lösung mit dem Kreuzprodukt auf Seite 21

2 Abstand paralleler Geraden.

Berechne den Abstand zweier parallelen Geraden g und h.

MERKE:

Die Methode ist identisch wie bei dieser Aufgabe:
Berechne den Abstand eines Punktes von einer Geraden.
Man fällt das Lot vom Aufpunkt A der einen Geraden auf die andere Gerade. Den Lotfußpunkt kann man dann mit beiden Methoden berechnen:
Mit der Lotebene und mit der operativen Methode.



Beispiel 5: Gegeben: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$

1. Methode: Berechnung des Lotfußpunktes mit der Lotebene von $A(1|3|-2)$ auf h:

Man verwendet den Richtungsvektor $\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}$ als Normalenvektor für E_L: $x + 2y + 2z = k$

Mit $A(1|3|-2) \in E_L$ erhält man $k = 1 + 6 - 4 = 3:$ E_L: $x + 2y + 2z = 3$.

Schnitt von h mit E_L: $\boxed{-1+s} + 2 \cdot \boxed{2s} + 2 \cdot \boxed{2+2s} = 3 \Leftrightarrow s = 0$

Lotfußpunkt: $\vec{x} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(-1|0|2)$

2. Methode: Berechnung des Lotfußpunktes mit der operativen Methode:

Der Lotfußpunkt ist ein zunächst noch unbekannter Punkt von h: $F(-1+s\,|\,2s\,|\,2+2s)$

$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix}-1+s\\2s\\2+2s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2+s\\2s-3\\4+2s\end{pmatrix}$. Bedingung: $\overrightarrow{AF} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{AF} \cdot \vec{u} = 0$

d. h. $\begin{pmatrix}-2+s\\2s-3\\4+2s\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow -2 + s + (2s-3) \cdot 2 + (4s+2) \cdot 2 = 0$ ergibt s = 0.

s in g ersetzen ergibt den Lotfußpunkt: $\vec{f} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} \Leftrightarrow F(-1|0|2)$

Berechnung des Abstandes:

$$d(g,h) = d(A,F) = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \left|\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix}-2\\-3\\4\end{pmatrix}\right| = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

Trainingsaufgaben

2 Berechne den Abstand paralleler Geraden

a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Ergebnisse:

a) $d = \sqrt{74}$ Ich zeige eine Lösung mit einer Lotebene auf Seite 19.

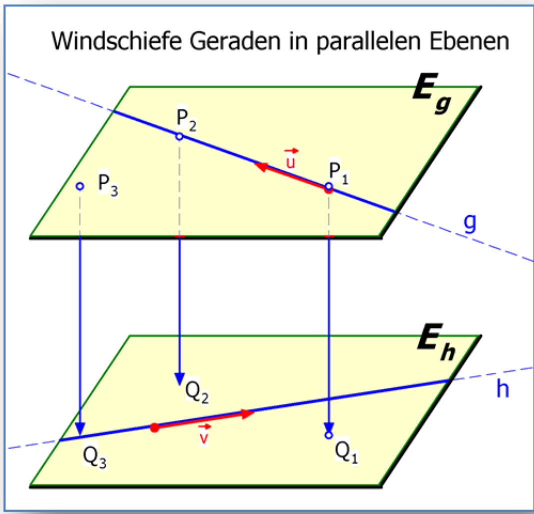
b) $d = 5\sqrt{3}$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 19.

3 Kürzester Abstand windschiefer Geraden – 3 Methoden

Berechne den kürzesten Abstand der windschiefen Geraden g und h.

Beispiel 17: Gegeben: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Methode mit parallelen Ebenen



Zu zwei windschiefen Geraden g und h gibt es zwei parallele Ebenen, eine durch g und die andere durch h.

Der gesuchte kürzeste Abstand der beiden windschiefen Geraden ist gleich groß wie der Abstand dieser beiden Ebenen. Diesen berechnet man als Abstand eines Punktes aus E_g von der anderen Ebene E_h, also mittels HNF.

Wenn die Geraden windschief sind (also nicht parallel!), kann man einen gemeinsamen Normalenvektor $\vec{n}$ zu beiden Ebenen berechnen.

Dazu kennen wir zwei Methoden:

Die Skalarproduktmethode verwendet, dass $\vec{n}$ orthogonal zu $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sein muss: $\left\{\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \end{matrix}\right\}$

Die Vektorproduktmethode berechnet so: $\vec{n} = \vec{u}\times\vec{v}$

Mit $\vec{n}$ stellt man dann die Hessesche Normalform z. B. der Ebene E_h auf, mit der man dann den Abstand z. B. des Aufpunkts von g zu E_h berechnen und hat damit den kürzesten Abstand der windschieden Geraden g und h.

1. Lösungsweg: Manuell

1. Skalarproduktmethode: $\left\{\begin{matrix} \vec{u}\cdot\vec{n}=0 \\ \vec{v}\cdot\vec{n}=0 \end{matrix}\right\}$ d. h. $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow n_1 + n_3 = 0$ (a)

und $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow 2n_1 + n_2 - n_3 = 0$ (b)

In diesem System aus 2 Gleichungen mit 3 Unbekannten darf eine frei gewählt werden.

Wähle z. B. $n_3 = 1$, dann folgt aus (a): $n_1 = -1$ und aus (b): $n_2 = -2\cdot(-1)+1 = 3$

Damit haben wir diesen Normalenvektor gefunden: $\vec{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

2. Methode mit dem Vektorprodukt:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v} = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0-1\\2+1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc} \cancel{1} & \cancel{2} \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ \cancel{1} & \cancel{-1} \end{array}$$

Hilfsschema siehe Text 63200 / Seite 24

Damit Aufstellung der Normalengleichung der Ebene E_h: $-x + 3y + z = d$ (1)

Der Aufpunkt $P_2(2|1|2)$ von h liegt in E_h: $d = -2 + 3 + 2 = 3$ (2)

Normalengleichung der Ebene E_h: $-x + 3y + z = 3$ (3)

Durch den Betrag des Normalenvektors dividieren: $|\vec{n}| = \left|\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{11}$

ergibt die Hessesche-Normalform: $\dfrac{-x + 3y + z - 3}{\sqrt{11}} = 0$ (4)

Abstand des Aufpunkts $P_1(1|-1|0)$ von g zu E_h: $d(P_1, E_h) = \left|\dfrac{-1-3+0-3}{\sqrt{11}}\right| = \dfrac{7}{\sqrt{11}} = \dfrac{7}{11}\sqrt{11}$

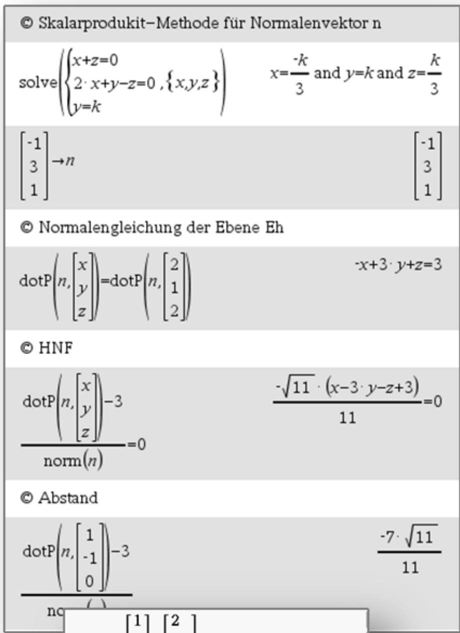
2. Lösungsweg: Mit CAS-Unterstützung:

Zuerst zeige ich mit TI Nspire die Realisierung der Skalarprodukt-Methode. Das Gleichungssystem aus $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ und $\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ wird durch eine dritte Gleichung y = k zu einem (3,3)-System ergänzt. Um einen ganzzahligen Normalenvektor zu bekommen, wähle ich dann k = 3.

Die Normalengleichung von E_h lautet vektoriell $\vec{n} \cdot \vec{x} = \vec{n} \cdot \vec{b}$

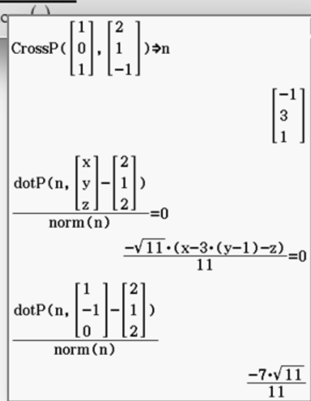
Man erkennt dann, dass $\vec{n} \cdot \vec{b} = 3$ ist und setzt daher die HNF gleich so an, wie es rechts zu sehen ist.

Man kann darin aber auch sofort den Aufpunkt $A(1|-1|0)$ einsetzen und erhält dann den Abstand, der negativ wird, weil ich mir den Betrag erspart habe.



Dann zeige ich mit CASIO ClassPad die Realisierung der Kreuzprodukt-Methode.

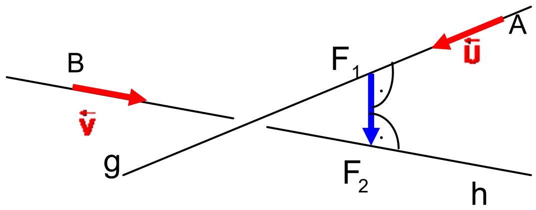
Nach der Berechnung und gleichzeitiger Definition des Normalenvektors $\vec{n}$ verwende ich hier die Normalengleichung in der Form $\vec{n} \cdot (\vec{x} - \vec{b}) = 0$, dividiere aber sofort durch den Betrag von $\vec{n}$, was zur HN von E_h führt.



In diese habe ich dann den Aufpunkt $A(1|-1|0)$ eingesetzt, was den Abstand (ohne Betrag negativ) liefert.

Wer Routine hat, kann die zweite Zeile (nur HNF) weglassen. Dann kommt man tatsächlich mit nur 2 Eingabezeilen aus!

2. Operative Methode:



Man denkt sich auf den windschiefen Geraden zwei zunächst beliebige Punkte F_1 und F_2.
Ihre Verbindungsstrecke ist die kürzeste, wenn F_1 und F_2 Lotfußunkte sind. Daraus ergibt sich folgendes Verfahren:

Man wählt zwei allgemeine Punkte F_1 und F_2 dieser Geraden, berechnet $\overrightarrow{F_1F_2}$ und verlangt, dass $\overrightarrow{F_1F_2}$ orthogonal zu den Richtungsvektoren der Geraden ist. Daraus erhält man die Parameter r und s für die Lotfußpunkte. Der Betrag von $\overrightarrow{F_1F_2}$ ist der gesuchte kürzeste Abstand.

1. Lösungsweg: Manuell

Gegeben: g: $\vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} + r\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ und h: $\vec{x} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$

Wähle: F_1 auf g: $\vec{f_1} = \begin{pmatrix}1+r\\-1\\r\end{pmatrix}$ und F_2 auf h: $\vec{f_2} = \begin{pmatrix}2+2s\\1+s\\2-s\end{pmatrix}$

Verbindungsvektor: $\overrightarrow{F_1F_2} = \vec{f_2} - \vec{f_1} = \begin{pmatrix}2+2s\\1+s\\2-s\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1+r\\-1\\r\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2s-r\\2+s\\2-s-r\end{pmatrix}$ (0)

<u>1. Bedingung</u>: $\overrightarrow{F_1F_2} \perp \vec{u} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{u} = 0$: $\begin{pmatrix}1+2s-r\\2+s\\2-s-r\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0$ (1)

<u>2. Bedingung</u>: $\overrightarrow{F_1F_2} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{v} = 0$: $\begin{pmatrix}1+2s-r\\2+s\\2-s-r\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = 0$ (2)

ausführlich: $1+2s-r+2-s-r=0$ (1')

$2+4s-2r+2+s-2+s+r=0$ (2')

Zusammenfassen: $s-2r+3=0$ (1")

$6s-r+2=0$ (2")

Aus (1") erhält man: $s = 2r-3$, in (2"): $6(2r-3)-r+2=0$

$12r-18-r+2=0$

$11r = 16 \Leftrightarrow r = \frac{16}{11}$

ergibt dann: $s = \frac{32}{11} - 3 = -\frac{1}{11}$

Damit folgt: $F_1\left(\frac{27}{11} \mid -1 \mid \frac{16}{11}\right)$ und $F_2\left(\frac{20}{11} \mid \frac{10}{11} \mid \frac{23}{11}\right)$

$$\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix}\frac{20}{11}\\\frac{10}{11}\\\frac{23}{11}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\frac{27}{11}\\-1\\\frac{16}{11}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{7}{11}\\\frac{21}{11}\\\frac{7}{11}\end{pmatrix} = \frac{7}{11} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$$

Diesen Vektor kann man auch direkt aus (0) bekommen.

Kürzester Abstand: $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \frac{7}{11} \cdot \sqrt{1+9+1} = \frac{7}{11}\sqrt{11}$

2. Lösungsweg: Mit CAS-Unterstützung:

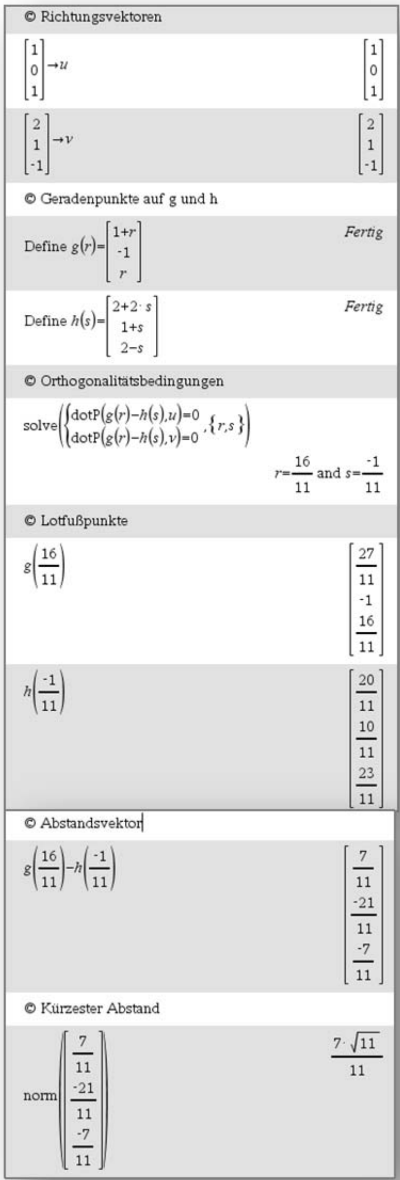
Dieser Screenshot stammt von der Computerversion von TI Nspire. Mit ihm kann man Kommentarzeilen darstellen, die man natürlich für Berechnungen weglässt.

Der Unterschied zu CASIO ClassPad besteht nur darin, dass diese für die Lösung des Gleichungssystems nicht den Befehl **solve** verwendet, sondern an dieser Stelle ohne ihn auskommt.

Dieses Gleichungssystem ist eigentlich die Stelle, bei der man genau hinsehen muss. Es besteht genau aus den beiden Gleichungen (1) und (2) der vorangehenden Seite, nur eben in nicht ausmultiplizierter Form, was eben dadurch möglich wird, dass ich damit begonnen habe, die Ortsvektoren für die Geradenpunkte als Vektorfunktionen zu definieren und auch die Richtungsvektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ definiert habe.

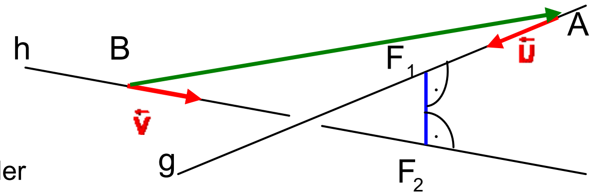
Wenn die Punkte F_1 und F_2 nicht gefragt sind, sondern nur der kürzeste Abstand der windschiefen Geraden gesucht ist, dann kann man die Berechnung der Lotfußpunkte und des Abstandsvektors weglassen. Dann würde die letzte Zeile zur Berechnung des kürzesten Abstands so aussehen:

$$\text{norm}\left(g\left(\tfrac{16}{11}\right)-h\left(\tfrac{-1}{11}\right)\right)$$



3. Methode mit einer geschlossenen Vektorkette:

Diese Methode wird wohl am seltensten angewandt. Ich zeige sie dennoch für Interessierte.



Man denkt sich auf den windschiefen Geraden zwei zunächst beliebige Punkte F_1 und F_2.
Ihre Verbindungsstrecke ist die kürzeste, wenn F_1 und F_2 Lotfußpunkte sind. A und B seien die Aufpunkte der Beiden Geraden, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ ihre Richtungsvektoren. Daraus ergibt sich folgendes Verfahren:

Man bildet diese **geschlossene Vektorkette**: $\overrightarrow{AF_1}+\overrightarrow{F_1F_2}+\overrightarrow{F_2B}+\overrightarrow{BA}=\vec{o}$ (1)

Der Vektor $\overrightarrow{AF_1}$ ist ein Vielfaches von $\vec{u}$: $\overrightarrow{AF_1}=r\cdot\vec{u}$

Der Vektor $\overrightarrow{BF_2}$ ist ein Vielfaches von $\vec{v}$: $\overrightarrow{BF_2}=s\cdot\vec{v}$

Eingesetzt in (1) $r\vec{u}+\overrightarrow{F_1F_2}\boxed{-}s\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)=\vec{o}$ (2)

Um die Loteigenschaft von F_1F_2 ausnützen zu können,
multipliziert man (2) einmal mit $\vec{u}$: $\left[r\vec{u}+\overrightarrow{F_1F_2}-s\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{u}=\vec{o}\cdot\vec{u}$ (3)

und einmal mit $\vec{v}$: $\left[r\vec{u}+\overrightarrow{F_1F_2}-s\vec{v}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\right]\cdot\vec{v}=\vec{o}\cdot\vec{v}$ (4)

Vereinfachung von (3): $r\cdot\vec{u}^2+\underbrace{\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\vec{u}}_{=0}-s\vec{v}\cdot\vec{u}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u}=0$

ergibt: $r\cdot\vec{u}^2-s\cdot\vec{v}\vec{u}+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\vec{u}=0$ (5)

Vereinfachung von (4): $r\cdot\vec{u}\vec{v}+\underbrace{\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\vec{v}}_{=0}-s\cdot\vec{v}^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\vec{v}=\vec{o}$

ergibt: $r\cdot\vec{u}\vec{v}-s\cdot\vec{v}^2+\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\vec{v}=\vec{o}$ (6)

Die Gleichungen (5) und (6) enthalten außer den beiden Unbekannten r und s nur die gegebenen Vektoren der beiden Geraden g und h. Also können wir <u>ab hier</u> mit Zahlen weiterrechnen.
Rechnet man zuerst allgemein, spart man Schreibarbeit.

Zahlenbeispiel dazu: g: $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}}_{=\vec{a}}+r\underbrace{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}}_{=\vec{u}}$, h: $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{b}}+s\underbrace{\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$.

Damit folgt: $\vec{u}^2=2$, $\vec{v}^2=6$, $\vec{u}\cdot\vec{v}=1$, $\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}-1\\-2\\-2\end{pmatrix}$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{u}=-3$, $\left(\vec{a}-\vec{b}\right)\cdot\vec{v}=-2$

Eingesetzt in (5) und (6):
$$2r-s-3=0 \quad (5)$$
$$r-6s-2=0 \quad (6)$$

$(5)-2\cdot(6)$: $11s+1=0 \Rightarrow s=-\frac{1}{11}$ $\Rightarrow F_2\left(\frac{20}{11}\,|\,\frac{10}{11}\,|\,\frac{23}{11}\right)$

in (6): $r+\frac{6}{11}-2=0 \Rightarrow r=\frac{16}{11}$ $\Rightarrow F_1\left(\frac{27}{11}\,|\,-1\,|\,\frac{16}{11}\right)$

Abstandsvektor: $\overrightarrow{F_1F_2}=\begin{pmatrix}\frac{20}{11}\\\frac{10}{11}\\\frac{23}{11}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\frac{27}{11}\\-1\\\frac{16}{11}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{7}{11}\\\frac{21}{11}\\\frac{7}{11}\end{pmatrix}=\frac{7}{11}\cdot\begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}$

Kürzester Abstand: $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|=\frac{7}{11}\cdot\sqrt{1+9+1}=\frac{7}{11}\sqrt{11}$

Trainingsaufgaben

3 Zeige dass diese Geraden windschief sind und berechne ihre kürzeste Entfernung.
Die erste Gerade sei g, die zweite h.

a) $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + r\underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}}, \quad \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 13 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

Ergebnisse:

a) $d = 3$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 22.
und eine Lösung mit der Methode „parallele Ebenen“ auf Seite 27

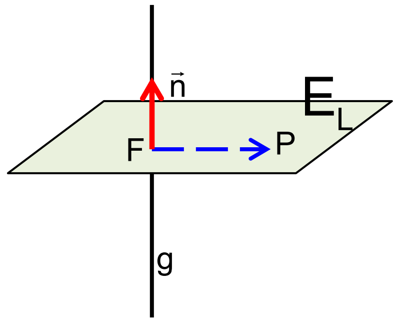
b) $d = 13$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 23.
und eine Lösung mit der Methode „parallele Ebenen“ auf Seite 27

c) $d = 9$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 24.
und eine Lösung mit der Methode „parallele Ebenen“ auf Seite 28

d) $d = \frac{30}{13}\sqrt{26}$ Ich zeige eine Lösung mit der operativen Methode auf Seite 25.
und eine Lösung mit der Methode „parallele Ebenen“ auf Seite 28

Lösung zu 1 Berechne den Abstand des Punktes P von der Geraden g.

a) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ -1{,}5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$, $P(1|1|2)$



Lösung mit der Methode „Lotebene zu g durch P“.

Die Lotebene hat den Richtungsvektor von g als Normalenvektor:

E_L: $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 = k$.

$P(1|1|2) \in E_L$: $k = 7 - 4 + 8 = 11$

E_L: $7x_1 - 4x_2 + 4x_3 = 11$

Schnitt von g und E_L: $7 \cdot \boxed{-4+7r} - 4 \cdot \boxed{9-4r} + 4 \cdot \boxed{-1{,}5+4r} = 11$

d.h. $-28 + 49r - 36 + 16r - 6 + 16r = 11$

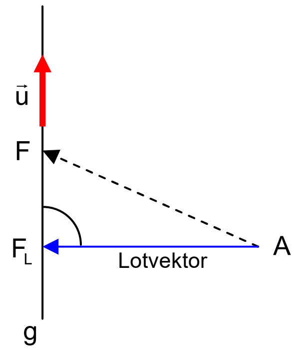
$81r = 81 \Leftrightarrow r = 1$

Lotfußpunkt: $F(3|5|2{,}5)$

Abstandsvektor: $\overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $d(P;g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \frac{1}{2}\left|\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{16+64+1} = \frac{9}{2}$

b) $g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 8 \\ 13 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $P(5|3|4)$



Lösung mit der operativen Methode:

Noch unbekannter Lotfußpunkt auf g: $F(1+2r|8-3r|13+r)$.

Dieser wird zum Lotfußpunkt, wenn $\boxed{\overrightarrow{PF} \cdot \vec{u} = 0}$ ist:

$$\left[\begin{pmatrix} 1+2r \\ 8-3r \\ 13+r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -4+2r \\ 5-3r \\ 9+r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$-8 + 4r - 15 + 9r + 9 + r = 0 \Rightarrow r = 1$ Lotfußpunkt: $F_L(3|5|14)$

Abstandsvektor: $\overrightarrow{F_LP} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -10 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $d(P;g) = \left|\overrightarrow{F_LP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{108} = 6\sqrt{3}$

c) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad P(2|-4|-2)$

Lösung mit der Methode „Lotebene zu g durch P“.

E_L: $\qquad x_1 - 2x_2 - x_3 = k$.

$P(2|-4|-2) \in E_L$: $\qquad k = 2+8+2 = 12$

E_L: $\qquad x_1 - 2x_2 - x_3 = 12$

Schnitt von g und E_L: $\qquad (1+r) - 2(-2-2r) - (5-r) = 12$

ergibt $\qquad 1+r+4+4r-5+r = 12 \;\Rightarrow\; r = 2$

Lotfußpunkt: $\qquad F(3|-6|3)$

Abstandsvektor: $\qquad \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $\qquad d(P;g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{1+4+25} = \sqrt{30}$

d) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -10 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix}$ $\qquad P(5|-3|0)$

Lösung mit der operativen Methode:

Noch unbekannter Lotfußpunkt auf g: $\qquad F(-1+r|2-3r|-10+11r)$.

Dieser wird zum Lotfußpunkt, wenn $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{u} = 0$ ist:

$$\left[\begin{pmatrix} -1+r \\ 2-3r \\ -10+11r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = 0 \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} -6+r \\ 5-3r \\ -10+11r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} = 0$$

$-6+r-15+9r-110+121r = 0 \;\Rightarrow\; 131r = 131 \;\Rightarrow\; r = 1$

Lotfußpunkt also: $\qquad F_L(0|-1|1)$.

Abstandsvektor: $\qquad \overrightarrow{PF_L} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $\qquad d(P;g) = \left|\overrightarrow{PF_L}\right| = \sqrt{25+4+1} = \sqrt{30}$

e) $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ $\qquad P(5|2|2)$

Lösung mit der Methode „Lotebene zu g durch P“.

E_L: $\qquad 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = k$

$P(5|2|2) \in E_L$: $\qquad k = 10 + 4 - 6 = 8$

E_L: $\qquad 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 8$

Schnitt von E_L und g ergibt den Fußpunkt des Lotes von P auf g:

$$2(-2+2r) + 2(-3+2r) - 3(11-3r) = 8$$

$$-4 + 4r - 6 + 4r - 33 + 9r = 8$$

$$17r = 51 \ \Rightarrow \ r = 3$$

Lotfußpunkt $\qquad F(4|3|2)$

Abstandsvektor: $\qquad \overrightarrow{PF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $\qquad d(P;g) = \left|\overrightarrow{PF}\right| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

f) $g: \ \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad P(4|5|3)$

Lösung mit der operativen Methode:

Noch unbekannter Lotfußpunkt auf g: $\qquad F(-7+3r|2|1-4r)$.

Dieser wird zum Lotfußpunkt, wenn $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{u} = 0$ ist:

$$\left[\begin{pmatrix} -7+3r \\ 2 \\ 1-4r \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0 \ \Leftrightarrow \ \begin{pmatrix} -11+3r \\ -3 \\ -2-4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

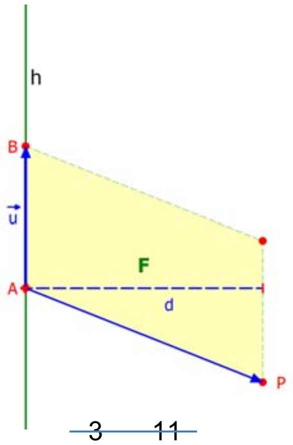
$$-33 + 9r + 8 + 16r = 0 \quad \Rightarrow \quad 25r = 25 \ \Rightarrow \ r = 1$$

Lotfußpunkt: $\qquad F_L(-4|2|-3)$

Abstandsvektor: $\qquad \overrightarrow{PF_L} = \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 \\ -3 \\ -6 \end{pmatrix}$

Gesuchter Abstand: $\qquad d(P;g) = \left|\overrightarrow{PF_L}\right| = \sqrt{64+9+36} = \sqrt{109}$

Nochmals zu f) $g:\quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$ $\qquad P(4|5|3)$



Lösung mit dem Kreuzprodukt:

Inhalt des Parallelogramms, berechnet mit dem Kreuzprodukt:

$$\overrightarrow{AP} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Verdopplungsschema:

$$\begin{array}{cc} \cancel{3} & \cancel{11} \\ 0 & 3 \\ -4 & 2 \\ 3 & 11 \\ 0 & 3 \\ \cancel{-4} & \cancel{2} \end{array}$$

$$F = \left|\vec{u} \times \overrightarrow{AP}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0+12 \\ -44-6 \\ 9-0 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 12 \\ -50 \\ 9 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{144+2500+81} = \sqrt{2725}\,\Big|$$

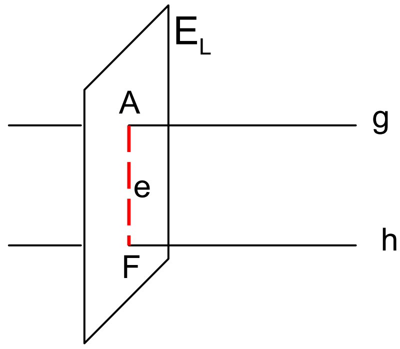
Inhalt des Parallelogramms, berechnet mit Grundseite $\overrightarrow{AB}$ und Höhe d:

$$F = |u| \cdot d = \sqrt{9+16} \cdot d = 5 \cdot d$$

Gleichsetzen: $\qquad 5 \cdot d = \sqrt{2725} \quad \Rightarrow \quad d = \sqrt{109}$

Lösung zu $\boxed{2}$: Berechne den Abstand paralleler Geraden

a) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$



Lösung mit der Lotebene zu g und h durch $A(1|1|-4)$:

Der Richtungsvektor von d wird zum Normalenvektor von E_L:

	$2x_1 + 2x_2 - x_3 = k$
$A(1|1|-4) \in E_L$:	$k = 2 + 2 + 4 = 88$
E_L:	$2x_1 + 2x_2 - x_3 = 8$
Schnitt von h mit E_L:	$2(2s) + 2(-2 + 2s) - (6 - s) = 8$
	$4s - 4 + 4s - 6 + s = 8 \Rightarrow 9s = 18 \Rightarrow s = 2$
Schnittpunkt:	$F(4|2|4)$
Abstandsvektor:	$\overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 8 \end{pmatrix}$
Gesuchter Abstand:	$d(g;h) = \left|\overrightarrow{AF}\right| = \sqrt{9 + 1 + 64} = \sqrt{74}$

b) $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $h:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Lösung mit der operativen Methode:

Ich fälle das Lot von $A(-1|-7|2) \in g$ auf h. (Es geht auch umgekehrt.)

Noch unbekannter Lotfußpunkt auf h: $F(1 + 3s|-2s|8 - s)$.

Dieser wird zum Lotfußpunkt, wenn $\overrightarrow{PF} \cdot \vec{u} = 0$ ist:

$$\left[\begin{pmatrix} 1+3s \\ -2s \\ 8-s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2+3s \\ 7-2s \\ 6-s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$$

$$6 + 9s - 14 + 4s - 6 + s = 0$$

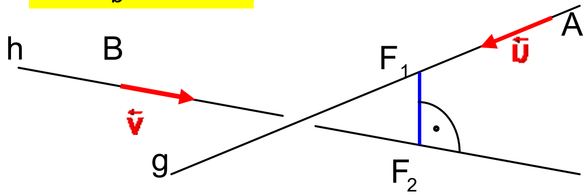
$$14s = 14 \Rightarrow s = 1$$

Lotfußpunkt daher	$F_L(4|-2|7)$
Abstandsvektor:	$\overrightarrow{AF_L} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$
Gesuchter Abstand:	$d(g;h) = \left|\overrightarrow{AF_L}\right| = \sqrt{25 + 25 + 25} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

Lösung zu 3 Zeige dass diese Geraden windschief sind und berechne ihre kürzeste Entfernung. Die erste Gerade sei g, die zweite h.

a) Gegeben: g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}}$ und h: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$

Untersuchung der Lage von g und h:



$$D = \left| \vec{u} \ \ \vec{v} \ \ \overrightarrow{AB} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 2 & -3 \\ -4 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \\ -4 & -2 \end{matrix}$$

$$= 6 + 12 - 20 + 16 - 18 - 5 = -9 \neq 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ nicht komplanar. Daher sind g und h windschief.

1. Berechnung der kürzesten Entfernung von g und h mit der operativen Methode:

Es sei F_1 der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf g, F_2 der auf h.

Da F_1 auf g liegt, gilt: $F_1(-2+3r|-1+5r|4-4r)$, da F_2 auf h liegt, gilt: $F_2(s|-4+2s|5-2s)$.

Lotvektor zu g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} s \\ -4+2s \\ 5-2s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -2+3r \\ -1+5r \\ 4-4r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+s-3r \\ -3-5r+2s \\ 1+4r-2s \end{pmatrix}$

Damit F_1 und F_2 Lotfußpunkte werden, muss der Vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ orthogonal sein.
Also gelten diese Bedingungsgleichungen:

1. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{u} = 0}$

$$\begin{pmatrix} 2+s-3r \\ -3-5r+2s \\ 1+4r-2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$$

$$6 + 3s - 9r - 15 - 25r + 10s - 4 - 16r + 8s = 0$$

$$-13 - 50r + \boxed{21s} = 0 \qquad (1)$$

und 2. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{v} = 0}$

$$\begin{pmatrix} 2+s-3r \\ -3-5r+2s \\ 1+4r-2s \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2 + s - 3r - 6 - 10r + 4s - 2 - 8r + 4s = 0$$

$$-6 - 21r + 9s = 0 \quad | :3$$

$$-2 - 7z + 3s = 0 \quad | \cdot 7 \qquad (2)$$

$$-14 - 49r + \boxed{21s} = 0 \qquad (3)$$

(1) – (3): $1 - r = 0 \iff \boxed{r = 1}$ in (2): ergibt s = 3.

Berechnung der Lotfußpunkte: Mit r = 1: $F_1(1|4|0)$ und mit s = 3: $F_2(3|2|-1)$.

Gemeinsamer Lotvektor für g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Länge des gemeinsamen Lotes: $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{4+4+1} = 3$

Ergebnis: Der kürzeste Abstand von g und h ist 3.

b) Gegeben: $g: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}}_{=\vec{a}} + r \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}}_{=\vec{u}}$, $h: \vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 11 \\ -15 \\ -15 \end{pmatrix}}_{=\vec{b}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$

Untersuchung der Lage von g und h:

$$D = \left| \vec{u} \quad \vec{v} \quad \overrightarrow{AB} \right| = \begin{vmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -20 \\ 4 & -4 & -21 \end{vmatrix} \begin{matrix} 3 & 3 \\ 0 & -2 \\ 4 & -4 \end{matrix} = 126 - 240 + 16 - 240 = -338 \neq 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ nicht komplanar. Daher sind g und h windschief.

1. Berechnung der kürzesten Entfernung von g und h mit der operativen Methode

Es sei F_1 der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf g, F_2 der auf h.

Da F_1 auf g liegt, gilt: $F_1(9+3r|5|6+4r)$, da F_2 auf h liegt, gilt: $F_2(11+3s|-15-2s|-15-4s)$.

Lotvektor zu g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} 11+3s \\ -15-2s \\ -15-4s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 9+3r \\ 5 \\ 6+4r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3s-3r \\ -20-2s \\ -21-4s-4r \end{pmatrix}$

Damit F_1 und F_2 Lotfußpunkte werden, muss der Vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ orthogonal sein.

Also gelten diese Bedingungsgleichungen:

1. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{u} = 0}$

$\begin{pmatrix} 2+3s-3r \\ -20-2s \\ -21-4s-4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = 0$

$6 + 9s - 9r - 84 - 16s - 16r = 0$

$\boxed{-25r} - 7s = 78 \quad | \cdot 7 \qquad (1)$

$\boxed{-175r} - 49s = 5461 \qquad (2)$

und 2. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{v} = 0}$

$\begin{pmatrix} 2+3s-3r \\ -20-2s \\ -21-4s-4r \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$

$6 + 9s - 9r + 40 + 4s + 84 + 16s + 16r = 0$

$\boxed{7r} + 29s = -130 \quad | \cdot 25 \qquad (3)$

$\boxed{175r} + 725s = -3250 \qquad (4)$

Elimination von r durch $(3)+(4)$: $676s = -2704 \Leftrightarrow s = -4$

In (1) folgt: $-25r + 28 = 78$ ergibt $-25r = 50 \Leftrightarrow r = -2$

Lotfußpunkte: Mit r = -2: $F_1(3|5|-2)$ und mit s = -4: $F_2(-1|-7|1)$.

Gemeinsamer Lotvektor für g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -1 \\ -7 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -12 \\ 3 \end{pmatrix}$

Länge des Lotes: $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \sqrt{16+144+9} = \sqrt{169} = 13$.

Ergebnis: Der kürzeste Abstand von g und h ist 13.

c) Gegeben: $g:\ \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}}_{=\vec{a}}+r\underbrace{\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}}_{=\vec{u}}$, $h:\ \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}9\\0\\13\end{pmatrix}}_{=\vec{b}}+s\underbrace{\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$

Untersuchung der Lage von g und h:

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{array}{ccc|cc}4&4&3&4&4\\1&2&-5&1&2\\3&5&11&3&5\end{array}\right.=88-60+15-18+100-44=81\neq 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ linear unabhängig. Daher sind g und h windschief.

1. Berechnung der kürzesten Entfernung von g und h mit der operativen Methode

Es sei F_1 der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf g, F_2 der auf h.

Da F_1 auf g liegt, gilt: $F_1(6+4r|5+r|2+3r)$, da F_2 auf h liegt, gilt: $F_2(9+4s|2s|13+5s)$.

Gemeinsamer Lotvektor zu g und h: $\overrightarrow{F_1F_2}=\begin{pmatrix}9+4s\\2s\\13+5s\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}6+4r\\5+r\\2+3r\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+4s-4r\\-5+2s-r\\11+5s-3r\end{pmatrix}$

Damit F_1 und F_2 Lotfußpunkte werden, muss der Vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ orthogonal sein.

Also gelten diese Bedingungsgleichungen:

1. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\vec{u}=0}$

$\begin{pmatrix}3+4s-4r\\-5+2s-r\\11+5s-3r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}=0$

$12+16s-16r-5+2s-r+33+15s-9r=0$

$-26r+33s+40=0 \quad |\cdot 5 \quad (1)$

$-130r+\boxed{165s}+200=0 \quad (2)$

und 2. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2}\cdot\vec{v}=0}$

$\begin{pmatrix}3+4s-4r\\-5+2s-r\\11+5s-3r\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}=0$

$12+16s-16r-10+4s-2r+55+25s-15r=0$

$-33r+45s+57=0 \ |:3 \quad (3)$

$-11r+15s+19=0 \quad |\cdot 11 \quad (4)$

$-121r+\boxed{165s}+209=0$

Elimination von s durch (3) – (4): $-9r=9 \Leftrightarrow r=-1$, in (1) ergibt das s = -2

Damit kann man die tatsächlichen Lotfußpunkte berechnen:

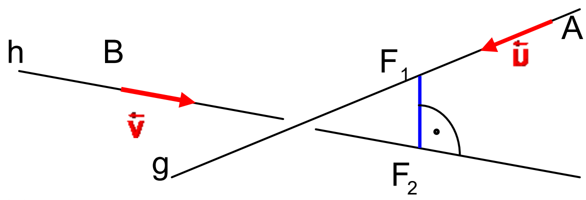
Mit r = -1: $F_1(2|4|-1)$ und mit s = -2: $F_2(1|-4|3)$.

Gemeinsamer Lotvektor für g und h: $\overrightarrow{F_1F_2}=\begin{pmatrix}1\\-4\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\4\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\\4\end{pmatrix}$

Länge dieses Lotes: $\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right|=\sqrt{1+64+16}=\sqrt{81}=9$.

Ergebnis: Der kürzeste Abstand von g und h ist 9.

d) g: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 18 \end{pmatrix}}_{\vec{a}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\vec{u}}$, h: $\vec{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{b}} + s \underbrace{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\vec{v}}$



Untersuchung der Lage von g und h:

$$D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -15 \end{vmatrix} \begin{matrix} -1 & 4 \\ 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{matrix} = -18 + 18 + 15 \cdot 3 \cdot 4 = 180 \neq 0 \,.$$

Also liegen die Geraden nicht in einer Ebene, sie sind daher windschief.

1. Berechnung der kürzesten Entfernung von g und h mit der operativen Methode

Es sei F_1 der Fußpunkt des gemeinsamen Lotes auf g, F_2 der auf h.

Da F_1 auf g liegt, gilt: $F_1(-t \mid -10+3t \mid 18)$, da F_2 auf h liegt, gilt: $F_2(-2+4s \mid -4 \mid 3+3s)$.

Gemeinsamer Lotvektor zu g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -2+4s \\ -4 \\ 3+3s \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -t \\ -10+3t \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4s+t \\ 6-3t \\ -15+3s \end{pmatrix}$

Damit F_1 und F_2 Lotfußpunkte werden, muss der Vektor $\overrightarrow{F_1F_2}$ zu $\vec{u}$ und zu $\vec{v}$ orthogonal sein.

Also gelten diese Bedingungsgleichungen:

1. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{u} = 0}$

$$\begin{pmatrix} -2+4s+t \\ 6-3t \\ -15+3s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$2 - 4s - t + 18 - 9t = 0$

$20 - 4s - 10t = 0 \quad | \cdot 2 \qquad (1)$

$40 - 8s - \boxed{20t} = 0 \qquad (2)$

und

2. $\boxed{\overrightarrow{F_1F_2} \cdot \vec{v} = 0}$

$$\begin{pmatrix} -2+4s+t \\ 6-3t \\ -15+3s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 0$$

$-8 + 16s + 4t - 45 + 9s = 0$

$-53 + 25s + 4t = 0 \quad | \cdot 5 \qquad (3)$

$-165 + 125s + \boxed{20t} = 0 \qquad (4)$

Elimination von t durch (3) + (4): $-125 + 117s = 0 \iff s = \frac{125}{117} = \frac{25}{13}$ (durch 9 gekürzt)

Eingesetzt in (1): $20 - \frac{100}{13} - 10t = 0 \Rightarrow 10t = \frac{160}{13} \Rightarrow t = \frac{16}{13}$

Lotfußpunkte: $F_1\left(-\frac{16}{13} \mid -\frac{82}{13} \mid 18\right)$ und $F_2\left(\frac{74}{13} \mid -4 \mid \frac{114}{13}\right)$

Gemeinsamer Lotvektor von g und h: $\overrightarrow{F_1F_2} = \begin{pmatrix} -2+4s+t \\ 6-3t \\ -15+3s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4\cdot\frac{25}{13}+\frac{16}{13} \\ 6-3\cdot\frac{16}{13} \\ -15+3\cdot\frac{25}{13} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{90}{13} \\ \frac{30}{13} \\ -\frac{120}{13} \end{pmatrix} = -\frac{30}{13} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$

Der Betrag des Vektors $\overrightarrow{F_1F_2}$ ist der gesuchte kürzeste Abstand:

$$\left|\overrightarrow{F_1F_2}\right| = \frac{30}{13} \cdot \sqrt{9+1+16} = \frac{30}{13} \cdot \sqrt{26} \approx 11{,}8$$

Zweite Lösungen mit der Methode „parallele Ebenen“

a) $\vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}}_{=\vec{a}}+r\underbrace{\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}}_{=\vec{u}}$, $\quad \vec{x}=\underbrace{\begin{pmatrix}0\\-4\\5\end{pmatrix}}_{=\vec{b}}+s\underbrace{\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}}_{=\vec{v}}$ 2. Lösung mit parallelen Ebenen

WISSEN: Zwei windschiefe Geraden liegen stets in zwei zueinander parallelen Ebenen.

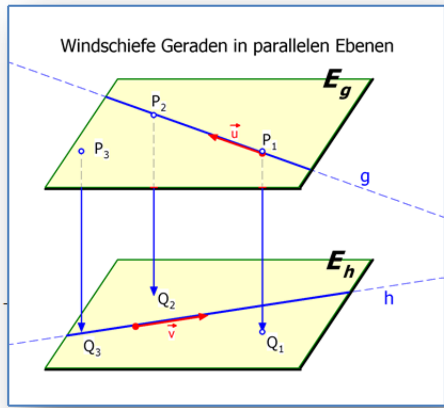
Ich berechne ihre Normalenvektoren jetzt mit dem *Vektorprodukt* und setze dann in die Formel ein.

Zuerst der manuelle Lösungsweg:

Gemeinsamer Normalenvektor:

$$\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\5\\-4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\2\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10+8\\-4+6\\6-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{cc}3&1\\5&2\\-4&-2\\3&1\\5&2\\-4&-2\end{array}$$



Ebene E_g, in der g liegt:

$-2x+2y+z=k$. Mit $A(-2|-1|4)\in E_g$ folgt $k=-2\cdot\boxed{-2}+2\cdot\boxed{-1}$

E_g: $\quad -2x+2y+z=6 \qquad$ HNF: $\dfrac{-2x+2y+z-6}{3}=0$.

Den Abstand der parallelen Ebenen erhält man, indem man den Aufpunkt $B(0|-4|5)$ von h einsetzt:

$$e=\left|\frac{-2\cdot\boxed{0}+2\cdot\boxed{-4}+\boxed{5}-6}{3}\right|=\frac{9}{3}=3$$ Das ist auch der kürzeste Abstand der windschiefen Geraden.

b) Gegeben: $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\5\\6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}$, $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}11\\-15\\-15\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}$ (Lösung mit parallelen Ebenen)

<u>Untersuchung der Lage von g und h:</u>

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{array}{ccc|cc}3&3&2&3&3\\0&-2&-20&0&-2\\4&-4&-21&4&-4\end{array}\right.=126-240+16-240\neq 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ nicht komplanar. Daher sind g und h windschief.

$$\begin{array}{cc}3&3\\0&-2\\4&-4\\3&3\\0&-2\\4&-4\end{array}$$

Gemeinsamer Normalenvektor von g und h: $\quad \vec{n}=\begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\-2\\-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\24\\-6\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}4\\12\\-3\end{pmatrix}$

Ebene durch g: $\quad 4x+12y-3z=d$. Punktprobe mit $A(9|5|6)$: $d=36+60-18=78$

HNF: $\quad \dfrac{4x+12y-3z-78}{\sqrt{16+144+9}}=0 \iff \dfrac{4x+12y-3z-78}{13}=0$

Der kürzeste Abstand: $\quad d(g,h)=d(B,E_g)=\dfrac{\left|4\cdot\boxed{11}+12\cdot\boxed{-15}-3\cdot\boxed{-15}-78\right|}{13}=\dfrac{|-169|}{13}=13$

c) Gegeben: $g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}6\\5\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}$, $h:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}9\\0\\13\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$

<u>Untersuchung der Lage von g und h:</u>

$$D=\left|\vec{u}\ \ \vec{v}\ \ \overrightarrow{AB}\right|=\left|\begin{matrix}4&4&3\\1&2&-5\\3&5&11\end{matrix}\right|\begin{matrix}4&4\\1&2\\3&5\end{matrix}=88-60+15-18+100-44=81\neq 0$$

Also sind die Vektoren $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\overrightarrow{AB}$ nicht komplanar. Daher sind g und h windschief.

$$\begin{matrix}3&3\\0&-2\\4&-4\\3&3\\0&-2\\4&-4\end{matrix}$$

Gemeinsamer Normalenvektor von $\vec{u}$ und $\vec{v}$: $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}4\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\-8\\4\end{pmatrix}$

Normalengleichung von E_g durch g: $-x-8y+4z=k$

Mit dem Aufpunkt $A(6\,|\,5\,|\,2)$ von g: $k=-6-40+8=-38$

E_g: $-x-8y+4z=-38 \quad |\cdot(-1)$

E_g: $x+8y-4z=38$

$|\vec{n}|=\sqrt{1+64+16}=9$ HNF von E_g: $\dfrac{x+8y-4z-38}{9}=0$

Abstand des Aufpunkts $B(9\,|\,0\,|\,13)$ von h zu E_g:

$$d(E_h,E_g)=\frac{\left|\boxed{9}+8\cdot\boxed{0}-4\cdot\boxed{13}-38\right|}{9}==\frac{|-81|}{9}=9$$

d) Gegeben: g: $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\-10\\18\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-1\\3\\0\end{pmatrix}$, h: $\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\3\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}4\\0\\3\end{pmatrix}$

<u>Untersuchung der Lage von g und h:</u> $D=\left|\begin{matrix}-1&4&-2\\3&0&6\\0&3&-15\end{matrix}\right|\neq 0.$

Also liegen die Geraden nicht in einer Ebene, sie sind daher windschief.

Normalenvektor der parallelen Ebenen durch g und h: $\vec{n}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{pmatrix}9\\3\\-12\end{pmatrix}=3\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\-4\end{pmatrix}$

Normalengleichung von E_g: $3x+y-4z=d$

Punktprobe mit $A(0\,|-10\,|\,18)\in g$: $d=-10-4\cdot 18=-82$

HNF von E_g: $\dfrac{3x+y-4z\boxed{+}82}{\sqrt{9+1+16}}=0$ bzw. $\dfrac{-3x-y+4z\boxed{-}82}{\sqrt{26}}=0$

$$d_{min}(g,h)=b(B,E_g)=\frac{\left|-3\cdot\boxed{-2}-\boxed{-4}+4\cdot\boxed{3}-82\right|}{\sqrt{26}}=\frac{60}{\sqrt{26}}=\frac{60\cdot\sqrt{26}}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{26}}=\frac{60\cdot\sqrt{26}}{26}=\tfrac{30}{13}\sqrt{26}$$